【Ⅰ】

〔解答〕

(1) 球のとりだし方は${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$通り

このうち，異なる3つの自然数の和が8となるのは$(1,\ 2,\ 5)$，$(1,\ 3,\ 4)$の2通り

したがって求める確率は

$n=3$のとき0，$n=4$のとき$\dfrac{1}{4}$

$n\geqq 5$のとき$\dfrac{12}{n(n-1)(n-2)}$　　…(答)

(2) 球のとり出し方はn^3通り

このうち題意を満たすとり出し方は${}_n\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=3n(n-1)$通り

$$\therefore\quad \frac{3(n-1)}{n^2}\quad\cdots\text{(答)}$$

(3) $\dfrac{3(n-1)}{n^2}\geqq\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ n^2\leqq 6(n-1)$

$\therefore\quad n=3,\ 4\quad\cdots$(答)

【Ⅱ】

〔解答〕

$c \geqq 4$ と仮定すると，

$a \geqq b \geqq c \geqq 4$ より，$\dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{4}$

$1+\dfrac{1}{a} \leqq 1+\dfrac{1}{b} \leqq 1+\dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{5}{4}$

このとき，$2=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right) \leqq \left(\dfrac{5}{4}\right)^3=\dfrac{125}{64}<2$

となり矛盾。

したがって$1 \leqq c \leqq 3$である。

（ⅰ）$c=1$ のとき

$$1<\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1 \quad \text{より不適。}$$

（ⅱ）$c=2$ のとき

$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{3}{2}=2$　より

$(a-3)(b-3)=12$

$a,\ b$ は $a \geqq b \geqq c=2$ を満たす整数であることから，

$(a-3,\ b-3)=(12,\ 1),\ (6,\ 2),\ (4,\ 3)$

したがって　$(a,\ b)=(15,\ 4),\ (9,\ 5),\ (7,\ 6)$

（ⅲ）$c=3$ のとき

$\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{4}{3}=2$　より

$(a-2)(b-2)=6$

$a,\ b$ は $a \geqq b \geqq c=3$ を満たす整数であることから，

$(a-2,\ b-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2)$

したがって　$(a,\ b)=(8,\ 3),\ (5,\ 4)$

（ⅰ）～（ⅲ）より

$(a,\ b,\ c)=(15,\ 4,\ 2),\ (9,\ 5,\ 2),\ (7,\ 6,\ 2),\ (8,\ 3,\ 3),\ (5,\ 4,\ 3)$　…（答）

【Ⅲ】

〔解答〕

（1） $\int_a^x (x-t)f(t)dt = \cos(ax) - b$

$$\Leftrightarrow \quad x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = \cos(ax) - b \quad \cdots ①$$

と変形でき，①の両辺を x で微分すると，

$$\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = -a\sin(ax) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^x f(t)dt = -a\sin(ax) \quad \cdots ②$$

また，②の両辺を x で微分すると， $f(x) = -a^2\cos(ax) \quad \cdots ③$

①，②の両辺に $x = a$ を代入すると

$$\begin{cases} \cos(a^2) - b = 0 \\ -a\sin(a^2) = 0 \end{cases}$$

$0 < a < 2$ であることより　　$a = \sqrt{\pi}$， $b = -1$　…（答）

（2）③の結果より　　$f(x) = -\pi\cos(\sqrt{\pi}x)$　…（答）

（3）（2）の結果より $f(x)$ は周期 $2\sqrt{\pi}$ の関数であり，

$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{\pi}$ の範囲において $x = \sqrt{\pi}$ で極大かつ最大となる。

したがって， $f(x)$ は k を整数として

$$x = (2k-1)\sqrt{\pi} \quad \cdots（答）$$

で最大となる。

【Ⅳ】

〔解答〕

（1） $y' = \dfrac{1-\log x}{x^2}$ より

増減・極値は右の表の通り。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'	/	$+$	0	$-$
y	/	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{e}$	$\searrow$

…（答）

（2）〔証明〕 $e<3$ であるので，自然数 k が4以上のとき，

$k-1 \leqq x \leqq k$ を満たす x について（1）の増減から

$$\frac{\log k}{k} \leqq \frac{\log x}{x} \leqq \frac{\log(k-1)}{k-1} \text{が成り立つ。}$$

したがって

$$\frac{\log k}{k} \leqq \int_{k-1}^{k} \frac{\log x}{x}dx \leqq \frac{\log(k-1)}{k-1}$$

$k=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ n$ について和をとると

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{\log k}{k} \leqq \int_3^n \frac{\log x}{x}dx \leqq \sum_{k=4}^{n}\frac{\log(k-1)}{k-1}$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{\log k}{k} - \frac{\log 3}{3} \leqq \int_3^n \frac{\log x}{x}dx \leqq \sum_{k=3}^{n-1}\frac{\log k}{k}$$

よって

$$S_n - \frac{\log 3}{3} \leqq \int_3^n \frac{\log x}{x}dx \leqq S_{n-1} \quad \cdots\text{（証終）}$$

（3） $n \to \infty$ より，$n \geqq 4$ として考える。

$S_{n-1} < S_n$ より（2）と合わせて

$$S_n - \frac{\log 3}{3} \leqq \int_3^n \frac{\log x}{x}dx \leqq S_{n-1} < S_n$$

したがって

$$\int_3^n \frac{\log x}{x}dx \leqq S_n \leqq \int_3^n \frac{\log x}{x}dx + \frac{\log 3}{3}$$

ここで $\displaystyle\int_3^n \frac{\log x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_3^n = \frac{1}{2}\left\{(\log n)^2 - (\log 3)^2\right\}$

したがって

$$\frac{1}{2} - \frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2} \leqq \frac{S_n}{(\log n)^2} \leqq \frac{1}{2} - \frac{(\log 3)^2}{2(\log n)^2} + \frac{\log 3}{3(\log n)^2}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(\log n)^2} = \frac{1}{2} \quad \cdots\text{（答）}$$