【Ⅰ】

〔解答〕

（1） 全事象は${}_{10}\mathrm{C}_3=120$通り。

3つの数の和が8になる取り出し方は$(1,\ 2,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 4)$の2通り。

よって求める確率は$\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$ …（答）

（2） 全事象は10^3通り。

最初の2つが同じになるとき$(\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B})$となるのは$10\cdot1\cdot9=90$通り。

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{A})$, $(\mathrm{B},\ \mathrm{A},\ \mathrm{A})$のときも同様なので$90\cdot3=270$通り。

よって求める確率は$\dfrac{270}{10^3}=\dfrac{27}{100}$ …（答）

【Ⅱ】

〔解答〕

（1） $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

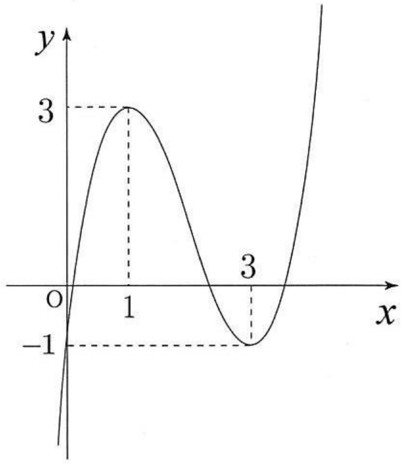
$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$

増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

極大値3 $(x=1)$，極小値-1 $(x=3)$

グラフは右の通り。　…（答）



（2） $f'(2)=-3$ より $\mathrm{A}(2\ ,1)$ における接線は

$y-1=-3(x-2)$

$y=-3x+7$　…（答）

$f'(4)=9$ より $\mathrm{B}(4\ ,3)$ における接線は

$y-3=9(x-4)$

$y=9x-33$　…（答）

（3） 2接線の交点の x 座標は $x=\dfrac{10}{3}$ より求める面積 S は

$$S=\int_2^{\frac{10}{3}}\left\{\left(x^3-6x^2+9x-1\right)-\left(-3x+7\right)\right\}dx+\int_{\frac{10}{3}}^4\left\{\left(x^3-6x^2+9x-1\right)-\left(9x-3\right)\right\}dx$$

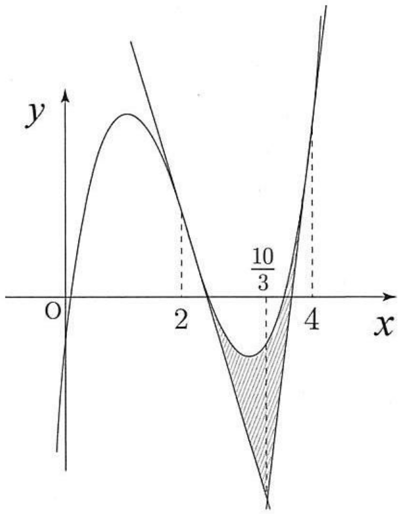
$$=\int_2^{\frac{10}{3}}(x-2)^3\,dx+\int_{\frac{10}{3}}^4(x-4)^2(x+2)\,dx$$

$$=\int_2^{\frac{10}{3}}(x-2)^3\,dx+\int_{\frac{10}{3}}^4(x-4)^2(x-4+6)\,dx$$

$$=\int_2^{\frac{10}{3}}(x-2)^3\,dx+\int_{\frac{10}{3}}^4\left\{(x-4)^3+6(x-4)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-2)^4\right]_2^{\frac{10}{3}}+\left[\frac{1}{4}(x-4)^4\right]_{\frac{10}{3}}^4+\left[2(x-4)^3\right]_{\frac{10}{3}}^4$$

$$=\frac{4}{3}$$　…（答）



【Ⅲ】

〔解答〕

（1）点Pから平面αに垂線PHを下ろす。

このとき，$\overrightarrow{PH} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{n}$ より実数kを用いて $\overrightarrow{PH}=k\overrightarrow{n}$ と表せ，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{n}=(-2-3k,\ 1+k,\ 7+2k)$$

また，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}=0$ であるから

$$-3(-3-3k)+1(-1+k)+2(3+2k)=0 \Leftrightarrow k=-1$$

したがって，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{n}=(-2,\ 1,\ 7)-2(-3,\ 1,\ 2)$

$\therefore$ R $(4,\ -1,\ 3)$ …（答）

（2）点Rは，平面αに関して点Pと対称なので，平面α上の任意の点Sに対してPS＝RS。

また，2点P，Qは平面αに関して同じ側にあるので，2点Q，Rは，平面αに関して相異なる側にある。

PS＋SQ＝RS＋SQ≧RQであることより，3点Q，S，Rが一直線上にあるとき，PS＋QSは最小となる。

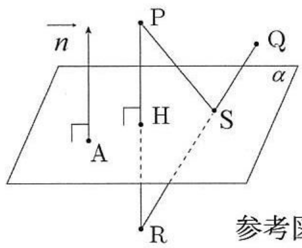
このとき，$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OR}+\mathrm{t}\overrightarrow{RQ}$ とおけ，$\overrightarrow{OS}=(4-3t,\ -1+4t,\ 3+4t)$ と表せる。

また，$\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{n}=0$ であるから

$$-3(3-3t)+1(-3+4t)+2(-1+4t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

したがって，$\mathrm{S}\left(2,\ \frac{5}{3},\ \frac{17}{3}\right)$ …（答）

またこのとき，PS＋QSの最小値はQRであり，最小値：$\sqrt{41}$ …（答）



参考図

【Ⅳ】

〔解答〕

（1） $\int_a^x (x-t)f(t)dt=\cos(ax)-b$

$$\Leftrightarrow\quad x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=\cos(ax)-b \quad \cdots①$$

と変形でき，①の両辺を x で微分すると，

$$\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-a\sin(ax) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^x f(t)dt=-a\sin(ax) \quad \cdots②$$

また，②の両辺を x で微分すると， $f(x)=-a^2\cos(ax)$ $\cdots③$

①，②の両辺に $x=a$ を代入すると

$$\begin{cases} \cos(a^2)-b=0 \\ -a\sin(a^2)=0 \end{cases}$$

$0<a<2$ であることより　　$a=\sqrt{\pi}$， $b=-1$　$\cdots$（答）

（2）③の結果より　　$f(x)=-\pi\cos(\sqrt{\pi}x)$　$\cdots$（答）

（3）（2）の結果より $f(x)$ は周期 $2\sqrt{\pi}$ の関数であり，

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{\pi}$ の範囲において $x=\sqrt{\pi}$ で極大かつ最大となる。

したがって， $f(x)$ は k を整数として

$$x=(2k-1)\sqrt{\pi} \quad \cdots（答）$$

で最大となる。