【Ⅰ】

〔解答〕

（1） 全事象は${}_{10}\mathrm{C}_3=120$通り。

3つの数の和が8になる取り出し方は$(1,\ 2,\ 5)$，$(1,\ 3,\ 4)$の2通り。

よって求める確率は$\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$ …（答）

（2） 全事象は10^3通り。

最初の2つが同じになるとき$(\mathrm{A},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B})$となるのは$10\cdot1\cdot9=90$通り。

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{A})$，$(\mathrm{B},\ \mathrm{A},\ \mathrm{A})$のときも同様なので$90\cdot3=270$通り。

よって求める確率は$\dfrac{270}{10^3}=\dfrac{27}{100}$ …（答）

【Ⅱ】

〔解答〕

（1）〔証明〕 $c=1$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot 2=2 \iff (a+1)(b+1)=ab \iff a+b+1=0$$

$a>0$， $b>0$ より矛盾。

このとき，等式（★）を満たす整数 a， b は存在しない。　…（証終）

（2） $c=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{3}{2}=2 \iff 3(a+1)(b+1)=4ab \iff (a-3)(b-3)=12$$

$a-3 \geqq b-3 \geqq -2$ であることより

$$(a-3,\ b-3)=(12,\ 1),\ (6,\ 2),\ (4,\ 3)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(15,\ 4),\ (9,\ 5),\ (7,\ 6)$　…（答）

（3） $c=3$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{4}{3}=2 \iff 4(a+1)(b+1)=6ab \iff (a-2)(b-2)=6$$

$a-3 \geqq b-3 \geqq c-3=0$ であることより $(a-2,\ b-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2)$

したがって　$(a,\ b)=(8,\ 3),\ (5,\ 4)$

$c \geqq 4$ のとき

$$a \geqq b \geqq c \geqq 4 \iff \frac{1}{a} \leqq \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{4} \iff 1+\frac{1}{a} \leqq 1+\frac{1}{b} \leqq 1+\frac{1}{c} \leqq \frac{5}{4}$$

このとき　$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^3 <2$

であり，等式（★）を満たす整数 a， b は存在しない。

（1）（2）の結果もあわせ，等式（★）を満たす整数 a， b， c は

$(a,\ b,\ c)=(15,\ 4,\ 2),\ (9,\ 5,\ 2),\ (7,\ 6,\ 2),\ (8,\ 3,\ 3),\ (5,\ 4,\ 3)$　…（答）

【Ⅲ】

〔解答〕

（1） $-x^2+10x-16=0 \iff (x-2)(x-8)=0$

$\therefore \alpha=2,\ \beta=8$ …（答）

（2） $S=\int_2^8\left(-x^2+10x-16\right)dx=\dfrac{1}{6}(8-2)^3=36$ …（答）

（3） $y=g(x)$ のグラフは，原点を通り $x=5$ で極値をとるので，

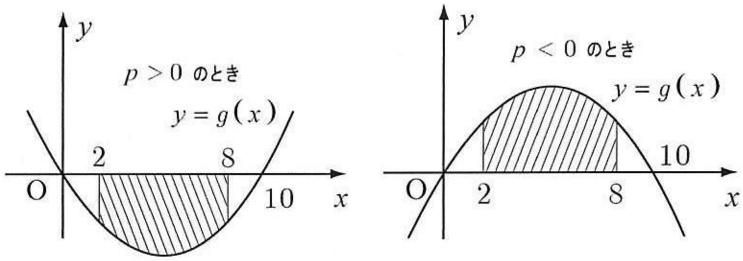
x 軸との共有点は原点と $(10,\ 0)$ となることがわかる。

したがって，$p\neq 0$ として $y=px(x-10)$ とおけ，$q=-10p$ となる。

また，題意の面積は $\left|\int_2^8 px(x-10)dx\right|$ と表せ，

$$\left|p\int_2^8 x(x-10)dx\right|=36 \iff 132p=\pm 36$$

$$\therefore\quad (p,\ q)=\left(\frac{3}{11},\ -\frac{30}{11}\right),\ \left(-\frac{3}{11},\ \frac{30}{11}\right)\quad \cdots\text{（答）}$$



参考図

【Ⅳ】

〔解答〕

（1）点Pから平面αに垂線PHを下ろす。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \parallel \overrightarrow{n}$ より実数kを用いて $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = k\overrightarrow{n}$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{n} = \left(-2-3k,\ 1+k,\ 7+2k\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$であるから

$$-3\left(-3-3k\right)+1\left(-1+k\right)+2\left(3+2k\right)=0 \iff k=-1$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{n} = \left(-2,\ 1,\ 7\right)-2\left(-3,\ 1,\ 2\right)$

$\therefore$ R $\left(4,\ -1,\ 3\right)$ …（答）

（2）点Rは，平面αに関して点Pと対称なので，平面α上の任意の点Sに対してPS＝RS。

また，2点P，Qは平面αに関して同じ側にあるので，2点Q，Rは，平面αに関して相異なる側にある。

PS＋SQ＝RS＋SQ≧RQであることより，3点Q，S，Rが一直線上にあるとき，PS＋QSは最小となる。

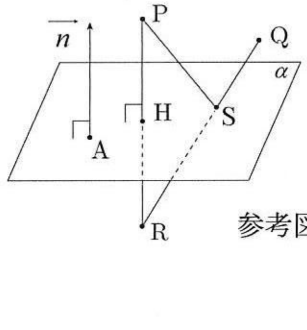
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \mathrm{t}\,\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \left(4-3t,\ -1+4t,\ 3+4t\right)$と表せる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AS}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AS}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$であるから

$$-3\left(3-3t\right)+1\left(-3+4t\right)+2\left(-1+4t\right)=0 \iff t=\frac{2}{3}$$

したがって，$\mathrm{S}\left(2,\ \frac{5}{3},\ \frac{17}{3}\right)$ …（答）

またこのとき，PS＋QSの最小値はQRであり，最小値：$\sqrt{41}$ …（答）



参考図