医〔Ⅰ〕

(1) $7x+13y=1111 \quad \cdots①$

$7\cdot(-1)+13\cdot 86=1111 \quad \cdots②$

①－②により

$7(x+1)+13(y-86)=0$

$7(x+1)=13(86-y)$

$x,\ y$ は自然数であり，7 と 13 は互いに素であることから

整数 k を用いて　$x+1=13k,\ 86-y=7k$　とおける。

すなわち　$x=13k-1,\ y=86-7k$

$x,\ y$ がともに自然数となるのは　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12$　のとき。

よって条件を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は　12 組　(答)

(2) (1)により，$x=13k-1,\ y=86-7k$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$

とおけるので，

$s=-(13k-1)+2(86-7k)$

$=-27k+173$

よって　最大値　146　$(k=1)$

最小値　-151　$(k=12)$　(答)

(3) (1)により，$x=13k-1,\ y=86-7k$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$

とおけるので，

$2x-5y=2(13k-1)-5(86-7k)$

$=61k-432$

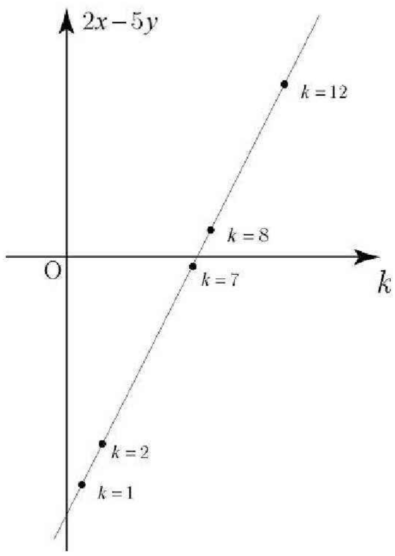
$k=1$ のとき，$2x-5y=-371$

$k=12$ のとき，$2x-5y=300$

$k=7$ のとき，$2x-5y=-5$

$k=8$ のとき，$2x-5y=56$

であることから，



$t=|2x-5y|$　の最大値　371　$(k=1)$

最小値　5　$(k=7)$　(答)

医〔Ⅱ〕・工〔Ⅱ〕

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{{a_n}^2}=3^n \quad \cdots①$

①の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_{n+1}-2\log_3 a_n=n$$

$b_n=\log_3 a_n$　より

$$b_{n+1}=2b_n+n \quad \cdots②$$

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+1 \quad \cdots②'$$

②′ −②　より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2\left(b_{n+1}-b_n\right)+1$$

$c_n=b_{n+1}-b_n$　とおくと

$$c_{n+1}=2c_n+1,\quad c_1=b_2-b_1=1$$

これを解くことにより

$$c_n=2^n-1$$

したがって

$$b_{n+1}-b_n=2^n-1 \quad \cdots③$$

②，③からb_{n+1}を消去して

$$b_n=2^n-n-1 \quad \text{(答)}$$

(2) $a_n \geqq 10^{100}$　の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_n \geqq 100\log_3 10$$

$$b_n \geqq \frac{100}{\log_{10}3}$$

$$2^n-n-1 \geqq \frac{100}{0.4771} \fallingdotseq 209.6 \quad \cdots④$$

$n=7$のとき，$2^n-n-1=120$

$n=8$のとき，$2^n-n-1=247$

であり，④の左辺は単調に増加するので

題意を満たす最小のnの値は　8 (答)

医〔Ⅲ〕

S_n は，$\dfrac{(2n-1)\pi}{b} \leqq x \leqq \dfrac{2n\pi}{b}$ （$n=1$，2，3，…）における

曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積より $S_n = \displaystyle\int_{\frac{(2n-1)\pi}{b}}^{\frac{2n\pi}{b}} \left(-e^{-ax}\sin bx\right) dx$

$$\left(e^{-ax}\sin bx\right)' = -ae^{-ax}\sin bx + be^{-ax}\cos bx \quad \cdots ①$$

$$\left(e^{-ax}\cos bx\right)' = -ae^{-ax}\cos bx - be^{-ax}\sin bx \quad \cdots ②$$

①× a ＋②× b より $\left\{e^{-ax}\left(a\sin bx + b\cos bx\right)\right\}' = -\left(a^2+b^2\right)e^{-ax}\sin bx$

$\therefore \displaystyle\int e^{-ax}\sin bx\, dx = \frac{-1}{a^2+b^2}e^{-ax}\left(a\sin bx + b\cos bx\right) + C$ （C ：積分定数）

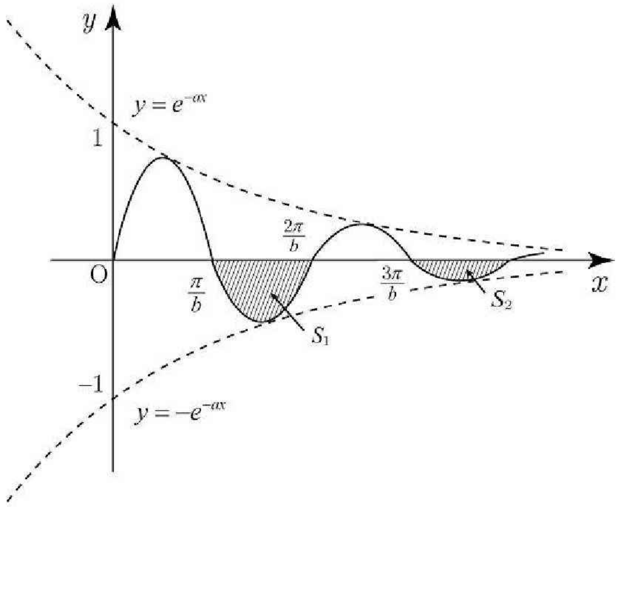
したがって

$$S_n = \left[\frac{1}{a^2+b^2}e^{-ax}\left(a\sin bx + b\cos bx\right)\right]_{\frac{(2n-1)\pi}{b}}^{\frac{2n\pi}{b}} = \frac{b}{a^2+b^2}\left(1+e^{\frac{a\pi}{b}}\right)e^{-\frac{2an\pi}{b}}$$

$\left\{S_n\right\}$ は初項：$\dfrac{b}{a^2+b^2}\left(1+e^{\frac{a\pi}{b}}\right)e^{-\frac{2a\pi}{b}}$ 　公比：$e^{-\frac{2a\pi}{b}}$

の等比数列であり $\left|e^{-\frac{2a\pi}{b}}\right| < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{b}{\left(a^2+b^2\right)\left(e^{\frac{a\pi}{b}}-1\right)} \qquad \text{（答）}$$



医〔Ⅳ〕

(1)　前半は省略

$$z=\frac{\beta(t)+ip\alpha(t)}{\alpha(t)+ip\beta(t)}$$

$$\frac{\beta(t)+ip\alpha(t)}{\alpha(t)+ip\beta(t)}\cdot\frac{\alpha(t)-ip\beta(t)}{\alpha(t)-ip\beta(t)}=\frac{(1+p^2)\alpha(t)\beta(t)+p\left(\{\alpha(t)\}^2-\{\beta(t)\}^2\right)i}{\{\alpha(t)\}^2+p^2\{\beta(t)\}^2}$$ より

$$\frac{(1+p^2)\alpha(t)\beta(t)}{\{\alpha(t)\}^2+p^2\{\beta(t)\}^2}=\frac{(1+p^2)(e^{2t}-e^{-2t})}{(1+p^2)(e^{2t}+e^{-2t})+2(1-p^2)}$$

$$\frac{p\left(\{\alpha(t)\}^2-\{\beta(t)\}^2\right)}{\{\alpha(t)\}^2+p^2\{\beta(t)\}^2}=\frac{4p}{(1+p^2)(e^{2t}+e^{-2t})+2(1-p^2)}$$ より

$$x=\frac{(1+p^2)(e^{2t}-e^{-2t})}{(1+p^2)(e^{2t}+e^{-2t})+2(1-p^2)},\quad y=\frac{4p}{(1+p^2)(e^{2t}+e^{-2t})+2(1-p^2)}$$ （答）

(2)　$\lim_{t\to\infty}x=1$，$\lim_{t\to-\infty}x=-1$

(3)　(1) の結果より $p\neq0$ から

$$\frac{x}{y}=\frac{(1+p^2)(e^{2t}-e^{-2t})}{4p}\quad\Leftrightarrow\quad e^{2t}-e^{-2t}=\frac{4p}{1+p^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$$\frac{4p}{y}=(1+p^2)(e^{2t}+e^{-2t})+2(1-p^2)\quad\Leftrightarrow\quad e^{2t}+e^{-2t}=\frac{1}{1+p^2}\left\{\frac{4p}{y}-2(1-p^2)\right\}$$

が得られ，$(e^{2t}+e^{-2t})^2-(e^{2t}-e^{-2t})^2=4$ に代入して整理

$$\left[\frac{1}{1+p^2}\left\{\frac{4p}{y}-2(1-p^2)\right\}\right]^2-\left(\frac{4p}{1+p^2}\cdot\frac{x}{y}\right)^2=4$$

$p\neq0$ より $x^2+y^2+\dfrac{1-p^2}{p}y-1=0$　（答）