工〔Ⅰ〕

(1)　与式を変形して　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{5}{4}\vec{b}$（答）

(2)　(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

したがって，AD：DB＝5：3，OD：DC＝1：1（答）

(3)　OD：DC＝1：1，$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ より

四角形 OACB＝2△OAB＝$\dfrac{15}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$（答）

△OAC＝2△OAD＝$2\cdot\dfrac{5}{8}$△OAB＝$\dfrac{75}{32}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$（答）

医〔Ⅱ〕・工〔Ⅱ〕

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{{a_n}^2}=3^n \quad \cdots①$

①の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_{n+1}-2\log_3 a_n=n$$

$b_n=\log_3 a_n$ より

$$b_{n+1}=2b_n+n \quad \cdots②$$

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+1 \quad \cdots②'$$

②′ −② より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2\left(b_{n+1}-b_n\right)+1$$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと

$$c_{n+1}=2c_n+1,\quad c_1=b_2-b_1=1$$

これを解くことにより

$$c_n=2^n-1$$

したがって

$$b_{n+1}-b_n=2^n-1 \quad \cdots③$$

②，③から b_{n+1} を消去して

$$b_n=2^n-n-1 \quad (答)$$

(2) $a_n \geqq 10^{100}$ の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_n \geqq 100\log_3 10$$

$$b_n \geqq \frac{100}{\log_{10}3}$$

$$2^n-n-1 \geqq \frac{100}{0.4771} \fallingdotseq 209.6 \quad \cdots④$$

$n=7$ のとき，$2^n-n-1=120$

$n=8$ のとき，$2^n-n-1=247$

であり，④の左辺は単調に増加するので

題意を満たす最小の n の値は 8 (答)

工〔Ⅲ〕

（1） $f'(x)=\dfrac{-\sqrt{2}\sin x-1}{\left(\sqrt{2}+\sin x\right)^2}$

$f'(x)=0$ より $0\leqq x\leqq 2\pi$ から $x=\dfrac{5}{4}\pi$， $\dfrac{7}{4}\pi$

よって増減表は下図。

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって

$0\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$， $\dfrac{7}{4}\pi\leqq x\leqq 2\pi$ において単調に減少し，

$\dfrac{5}{4}\pi\leqq x\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ において単調に増加する。

また，最大値：1（$x=\dfrac{7}{4}\pi$），最小値：-1（$x=\dfrac{5}{4}\pi$）　（答）

（2） $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{2}+\sin x}dx$

$$=\left[\log\left(\sqrt{2}+\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$　(答)

工〔Ⅳ〕

(1) $I=\int\left(-e^{-x}\right)'\sin x dx=-e^{-x}\sin x-\int\left(-e^{-x}\right)\cos x dx=J-e^{-x}\sin x$

$J=\int\left(-e^{-x}\right)'\cos x dx=-e^{-x}\cos x-\int\left(-e^{-x}\right)\left(-\sin x\right)dx=-I-e^{-x}\cos x$ （証終）

(2) $I=J-e^{-x}\sin x$， $J=-I-e^{-x}\cos x$ を連立して

$$I=-\frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x+\cos x\right)+C$$

$$J=\frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x-\cos x\right)+C'$$ （C，C' は積分定数） （答）

(3) S_n は，$\left(2n-1\right)\pi\leqq x\leqq 2n\pi$ （$n=1$，2，3，…）における

曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積より

$$S_n=\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\left(-e^{-x}\sin x\right)dx$$

$$=\left[\frac{e^{-x}}{2}\left(\sin x+\cos x\right)\right]_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}=\frac{\left(1+e^{\pi}\right)e^{-2n\pi}}{2}$$

$\left\{S_n\right\}$ は初項：$\dfrac{\left(1+e^{\pi}\right)e^{-2\pi}}{2}$ 公比：$e^{-2\pi}$

の等比数列であり $\left|e^{-2\pi}\right|<1$ より $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\frac{\left(1+e^{\pi}\right)e^{-2\pi}}{2}$$

$$=\frac{1}{2\left(e^{\pi}-1\right)}$$ （答）