地域〔Ⅰ〕

(1)　解の公式より　$x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$　(i は虚数単位)　　(答)

(2)　$\alpha=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$,　$\beta=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$

(ア)　$\alpha^2=-i$　より　$\alpha^4=-1$　　(答)

(イ)　$\alpha^8=1$　　(答)

(ウ)　解と係数の関係より　$\alpha\beta=1$　　(答)

(エ)　$\alpha^{1010}=\alpha^{4\times252+2}=\left(\alpha^4\right)^{252}\cdot\alpha^2=(-1)^{252}\cdot(-i)=-i$　　(答)

(オ)　$\alpha^{2017}\beta^{2013}=\alpha^4\cdot\left(\alpha\beta\right)^{2013}=-1\cdot1^{2013}=-1$　　(答)

地域〔II〕

(1)　与式を変形して　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{5}{4}\vec{b}$（答）

(2)　(1)より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

したがって，AD：DB＝5：3，OD：DC＝1：1（答）

(3)　OD：DC＝1：1，$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ より

四角形 OACB＝2△OAB＝$\dfrac{15}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$（答）

△OAC＝2△OAD＝$2\cdot\dfrac{5}{8}$△OAB＝$\dfrac{75}{32}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$（答）

地域〔Ⅲ〕

(1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n{}^2}=3^n \quad \cdots①$

①の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_{n+1}-2\log_3 a_n=n$$

$b_n=\log_3 a_n$ より

$$b_{n+1}=2b_n+n \quad \cdots②$$

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+1 \quad \cdots②'$$

②′ −② より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと

$$c_{n+1}=2c_n+1,\quad c_1=b_2-b_1=1$$

これを解くことにより

$$c_n=2^n-1$$

したがって

$$b_{n+1}-b_n=2^n-1 \quad \cdots③$$

②，③から b_{n+1} を消去して

$$b_n=2^n-n-1 \quad \text{(答)}$$

(2) $a_n \geqq 10^{100}$ の両辺は正より，底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_n \geqq 100\log_3 10$$

$$b_n \geqq \frac{100}{\log_{10}3}$$

$$2^n-n-1 \geqq \frac{100}{0.4771} \fallingdotseq 209.6 \quad \cdots④$$

$n=7$ のとき，$2^n-n-1=120$

$n=8$ のとき，$2^n-n-1=247$

であり，④の左辺は単調に増加するので

題意を満たす最小の n の値は　8 (答)

地域〔IV〕

(1)　$7x+13y=1111$　…①

$7\cdot(-1)+13\cdot 86=1111$　…②

①－②により

$$7(x+1)+13(y-86)=0$$

$$7(x+1)=13(86-y)$$

$x,\ y$ は自然数であり，7 と 13 は互いに素であることから

整数 k を用いて　$x+1=13k,\ 86-y=7k$　とおける。

すなわち　$x=13k-1,\ y=86-7k$

$x,\ y$ がともに自然数となるのは　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12$　のとき。

よって条件を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は　12 組　(答)

(2)　(1)により，$x=13k-1,\ y=86-7k$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$

とおけるので，

$s=-(13k-1)+2(86-7k)$

$\quad=-27k+173$

よって　最大値　146　$(k=1)$

　　　　最小値　-151　$(k=12)$　(答)

(3)　(1)により，$x=13k-1,\ y=86-7k$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$

とおけるので，

$2x-5y=2(13k-1)-5(86-7k)$

$\qquad\quad=61k-432$

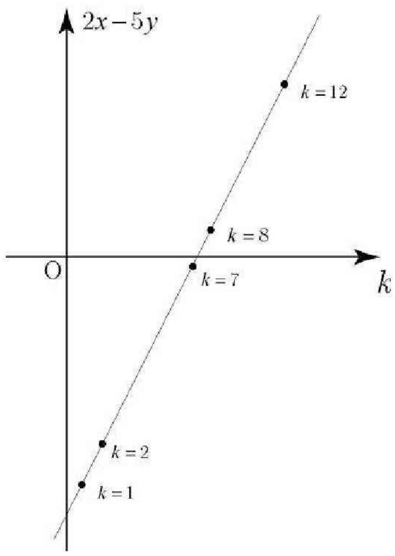
$k=1$ のとき，$2x-5y=-371$

$k=12$ のとき，$2x-5y=300$

$k=7$ のとき，$2x-5y=-5$

$k=8$ のとき，$2x-5y=56$

であることから，



$t=|2x-5y|$　の最大値　371　$(k=1)$

　　　　　　最小値　5　$(k=7)$　(答)