【地域Ⅲ】【医Ⅰ】

⑴　$t=\cos 2x$ より

$$\sin^2 2x = 1-t^2,\ \cos^2 x = \frac{1+t}{2}$$

よって　$f(x) = -t^2 - at + b + 1$（答）

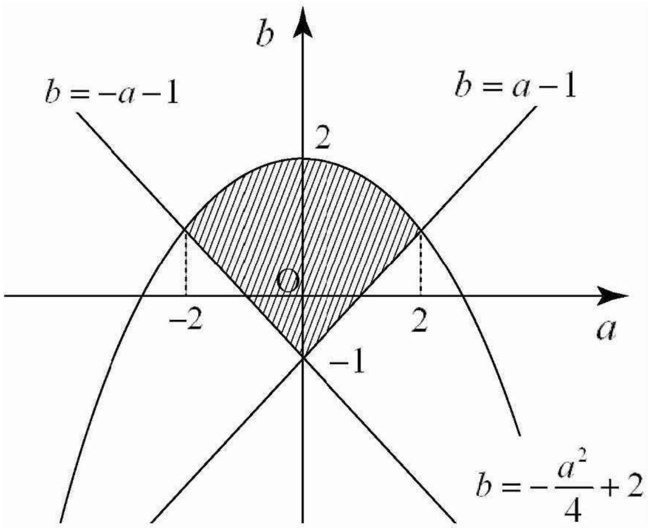
⑵　$g(t) = -t^2 - at + b + 1$　とおくと

$$g(t) = -\left(t+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$

条件を満たすには，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の最大値が 3 以下，最小値が－1 以上になればよい。したがって，a について

（ⅰ）$a < -2$　（ⅱ）$-2 \leqq a < 0$　（ⅲ）$0 \leqq a < 2$　（ⅳ）$2 \leqq a$

の 4 つの場合分けを考えることにより，以下の斜線部となる（境界含む）。



（答）

【工Ⅱ】【医Ⅱ】

(1) $D_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0 = \sqrt{\left(p_x - q_x\right)^2 + \left(p_y - q_y\right)^2}$ （答）

(2) $sR = A$ から $\begin{cases} s\cos\theta = a \\ -s\sin\theta = -b \end{cases}$ が得られ， $s > 0$ より $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ （答）

(3) 行列 A で表される 1 次変換 f は(2) の結果より

原点のまわりに θ だけ回転し，原点からの距離を s 倍にする相似変換を表す。

したがって A^n の表す 1 次変換によって点 P_0，Q_0 は 1 次変換 f を n 回繰り返すこと

になる。したがって， $\dfrac{D_n}{D_0} = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n$ （答）

【工Ⅲ】【医Ⅲ】

(1) $x=1-t$ と置換すると

$$B(p,\ q)=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,\ p)$$ （証終）

(2) $B(p,\ q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^1\left(\frac{1}{p}x^p\right)'(1-x)^q\,dx\\
&=\left[\frac{1}{p}x^p(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{p}x^pq(1-x)^{q-1}(-1)dx\\
&=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{q}{p}B(p+1,\ q)\cdots①
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)&=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx\\
&=\int_0^1\left\{x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q\right\}dx\\
&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{x+(1-x)\right\}dx=B(p,\ q)\cdots②
\end{aligned}$$

（証終）

(3) (2)の結果より

②に①を代入してすると，

$$B(p+1,\ q)+\frac{q}{p}B(p+1,\ q)=B(p,\ q)\quad\Leftrightarrow\quad B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q)$$

また$B(p,\ q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,\ q)$ （$\because$(2)）

$$\begin{aligned}
&=\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{p+q}B(p,\ q)\\
&=\frac{q}{p+q}B(p,\ q)
\end{aligned}$$ （証終）

(4) (3)の結果を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}
B(5,\ 4)&=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}B(1,\ 4)\\
&=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}B(1,\ 1)\\
&=\frac{1}{280}
\end{aligned}$$ （答）

【医Ⅳ】

(1)　$l:\dfrac{\cos t}{a}x+\dfrac{\sin t}{b}y=1$ (答)

(2)　$\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ とおく。すなわち $x_1=a\cos\theta,\ y_1=b\sin\theta$

このとき，Q における C の接線 m の方程式は　$\dfrac{x_1}{a^2}x+\dfrac{y_1}{b^2}y=1$

l と m は直交することより　$\dfrac{\cos t}{a}\cdot\dfrac{x_1}{a^2}+\dfrac{\sin t}{b}\cdot\dfrac{y_1}{b^2}=0$　…①

また，$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$　…②　が成り立つので，①②を連立して

$${y_1}^2=\frac{b^6\cos^2 t}{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}$$

$0<\theta<\pi$，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，$b>0$ であるので

$$y_1=\frac{b^3\cos t}{\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}}$$

これを①に代入して

$$x_1=-\frac{a^3\sin t}{\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}}$$

よって　$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{a^3\sin t}{\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}},\ \dfrac{b^3\cos t}{\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}}\right)$　(答)

また，直線 m の方程式は　$m:(a\sin t)x-(b\cos t)y=-\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}$　(答)

(3)　l と m の交点 R の座標を $(x_2,\ y_2)$ とおくと，

$$(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)x_2=ab^2\cos t-a\sin t\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}$$

$$(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)y_2=a^2b\sin t+b\cos t\sqrt{a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t}$$

$$\begin{aligned}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2({x_2}^2+{y_2}^2)&=(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)(a^4\sin^2 t+b^4\cos^2 t+a^2b^2)\\&=(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)(a^2+b^2)\end{aligned}$$

$a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\neq 0$ であるので ${x_2}^2+{y_2}^2=a^2+b^2$

よって　$\mathrm{OR}=\sqrt{a^2+b^2}$　(答)