【工Ⅰ】【地域Ⅰ】

(1)　$2^x+2^{-x}=t$ より両辺を2乗して整理すると

$4^x+4^{-x}=t^2-2$

したがって，与えられた方程式は

$$2(t^2-2)-9t+14=0$$

すなわち　$2t^2-9t+10=0$

また，$2^x>0$, $2^{-x}>0$ より

相加平均・相乗平均の関係から

$$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$

よって t に関する方程式は

$$2t^2-9t+10=0 \quad (t \geqq 2)$$（答）

(2)　(1)より $(2t-5)(t-2)=0$

$$t=\frac{5}{2},\ 2 \quad (t \geqq 2 \text{ を満たす})$$（答）

(3)　$t=\dfrac{5}{2}$ より，$x=\pm 1$

$t=2$ より，$x=0$

よって　　$x=0,\ \pm 1$（答）

【工Ⅱ】【医Ⅱ】

(1) $D_0 = \mathrm{P_0Q_0} = \sqrt{\left(p_x - q_x\right)^2 + \left(p_y - q_y\right)^2}$ （答）

(2) $sR = A$ から $\begin{cases} s\cos\theta = a \\ -s\sin\theta = -b \end{cases}$ が得られ，$s > 0$ より $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ （答）

(3) 行列 A で表される 1 次変換 f は(2) の結果より

原点のまわりに θ だけ回転し，原点からの距離を s 倍にする相似変換を表す。

したがって A^n の表す 1 次変換によって点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ は 1 次変換 f を n 回繰り返すこと

になる。したがって，$\dfrac{D_n}{D_0} = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n$ （答）

【工Ⅲ】【医Ⅲ】

(1) $x=1-t$ と置換すると

$$B(p,\ q)=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,\ p)$$ （証終）

(2) $$B(p,\ q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{p}x^p\right)'(1-x)^q\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{p}x^p(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{p}x^p q(1-x)^{q-1}(-1)dx$$

$$=\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{q}{p}B(p+1,\ q)\cdots①$$

$$B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx+\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$$

$$=\int_0^1\left\{x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q\right\}dx$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left\{x+(1-x)\right\}dx=B(p,\ q)\cdots②$$

（証終）

(3) (2)の結果より

②に①を代入してすると，

$$B(p+1,\ q)+\frac{q}{p}B(p+1,\ q)=B(p,\ q)\quad\Leftrightarrow\quad B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q)$$

また$B(p,\ q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1,\ q)$ （∵(2)）

$$=\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{p+q}B(p,\ q)$$

$$=\frac{q}{p+q}B(p,\ q)$$ （証終）

(4) (3)の結果を繰り返し用いて

$$B(5,\ 4)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}B(1,\ 4)$$

$$=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}B(1,\ 1)$$

$$=\frac{1}{280}$$ （答）

【工Ⅳ】

(1)　$\theta=0$ のとき与式は $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$ となり，この関係式の表す曲線上の点は

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす t を用いて　$(x,\ y)=(3\cos t,\ 3\sin t)$ とおける。

このとき　$xy=9\cos t\sin t=\dfrac{9}{2}\sin 2t$

となり $2t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき xy は最大となる。

したがって $\mathrm{P}(0)$ は $\left(3\cos\dfrac{\pi}{4},\ 3\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ （答）

(2)　与えられた関係式の表す曲線上の点は $0<u<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす u を用いて

$(x,\ y)=\left((\cos\theta+2)\cos u,\ (\sin\theta+3)\sin u\right)$ とおける。

このとき　$xy=(\cos\theta+2)(\sin\theta+3)\cos u\sin u$

(1) と同様にして，$u=\dfrac{\pi}{4}$ のとき xy は最大となる。

したがって $\mathrm{P}(\theta)$ は $\left(\dfrac{\cos\theta+2}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\sin\theta+3}{\sqrt{2}}\right)$ となり，

$\left(\dfrac{\cos\theta+2}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\sin\theta+3}{\sqrt{2}}\right)=(x,\ y)$ とおけば $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることより

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ （ただし $\sqrt{2}\leqq x,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq y$ を満たす部分）（答）