【工Ⅰ】【医Ⅰ】【地Ⅱ】

(1) (a) 一の位が偶数より，$2 \cdot 4^4 = 512$ 通り　(答)

(b) 各位の和が 9 の倍数になるものを数え上げて，

11124，11133，11223，12222，24444，33444

並べ替えを考慮に入れて

$20 + 10 + 30 + 5 + 5 + 10 = 80$ 通り　(答)

(c) 万の位が 3，4 のとき　$2 \cdot 4^4 = 512$

万の位が 2 のとき，千の位が 2，3，4 より　$3 \cdot 4^3 = 192$

よって　$512 + 192 = 704$ 通り（答）

(2)（医学科のみ）

5 桁の整数は全部で $4^5 = 1024$ 個あるので

${}_{1024}H_2 = {}_{1025}C_2 = 524800$ 通り　(答)

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地Ⅲ】

(1)　Hは平面ABC上の点より $s+t+u=1$ 　…①

　また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$（平面ABC）より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から

$$\begin{cases} -2s+3t+u=0 & \cdots② \\ -2s+t+4u=0 & \cdots③ \end{cases}$$

　①，②，③より　　$s=\dfrac{11}{21}$，$t=\dfrac{2}{7}$，$u=\dfrac{4}{21}$　(答)

(2)　(1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{21}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{10}{21}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

　∴　BP : PC＝2 : 3　(答)

(3)　(2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-1,\ \frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

　∴　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$　(答)

【医Ⅲ】【工Ⅲ】

(1) C_1 上の点$\left(a,\ \sqrt{a}\right)$における接線は，$y-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(x-a\right)$より

$$\therefore \quad L_1 : y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2} \quad \text{(答)}$$

(2) C_2 上の点$\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$（$b>0$）における接線の傾きは$y'=-\dfrac{1}{x^2}$より$-\dfrac{1}{b^2}$

$L_1 \perp L_2$から$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\left(-\dfrac{1}{b^2}\right)=-1 \qquad \therefore \quad b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4a}}$

したがって$y-\sqrt[4]{4a}=-2\sqrt{a}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[4]{4a}}\right)$

$$\therefore \quad L_2 : y=-2\sqrt{a}x+2\sqrt[4]{4a} \quad \text{(答)}$$

(3) (2) の結果より OA＝$\sqrt[4]{\dfrac{4}{a}}$，OB＝$2\sqrt[4]{4a}$

したがって，$l=\sqrt[4]{\dfrac{4}{a}}+2\sqrt[4]{4a}$

$\sqrt[4]{\dfrac{4}{a}}>0$，$2\sqrt[4]{4a}>0$より相加平均・相乗平均の関係から

$l \geqq 2\sqrt{\sqrt[4]{\dfrac{4}{a}}\cdot 2\sqrt[4]{4a}}=4$ （等号成立は$a=\dfrac{1}{4}$のとき）

∴　最小値4　(答)

【医Ⅳ】

(1) $f(x)=1+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ …①

両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \cdots ②$$

さらに両辺を x で微分して

$$f''(x)=f(x)$$

$\phi(x)=f(x)+f'(x)$ より

$\phi'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+f(x)$

よって $\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}=1$ (答)

(2) (1)より $\displaystyle\int\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx=\int 1dx$

$$\log\left|\phi(x)\right|=x+C \quad （積分定数を C とする）$$

$$\phi(x)=\pm e^{x+C}=Ae^x \quad （ただし，A=\pm e^C）$$

①，②より，$f(0)=1,\ f'(0)=0$ となり

$\phi(0)=1$ であることから，$A=1$

したがって $\phi(x)=e^x$

ここで $\left\{e^x f(x)\right\}'=e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}$

$$=e^x\phi(x)$$
$$=e^{2x}$$

これより $e^x f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C'$ （C' は積分定数）

$f(0)=1$ より $C'=\dfrac{1}{2}$ となり

$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ (答)