

【医Ⅰ】【工Ⅰ】【地Ⅲ】

$$(1) a_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1) \quad (\text{答})$$

$$(2) b_n = \sum_{k=1}^n (2k)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \text{ より}$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore a_n - b_n = -n(2n+1) \quad (\text{答})$$

$$(3) \text{【医】 } c_n = a_{n+1} - b_n \text{ から } c_n = (n+1)(2n+1)$$

また、 $c_n = 3n(n+1) - (n-1)(n+1)$ と変形でき、 $n(n+1)$ が $2!$ の倍数であることから、 c_n が 6 で割り切れるのは $(n-1)(n+1)$ が 6 の倍数となるとき。

$n-1$ と $n+1$ は偶奇が一致することより、 n は奇数となることが必要であり、このとき、いずれか一方が 3 の倍数になればよい。

すなわち、 $n-1$ 、 $n+1$ のいずれかが 6 の倍数であればよい。

したがって、条件を満たす n は整数 k を用いて

$$n-1=6k \text{ または } n+1=6k \text{ と表されるときである。}$$

よって求める n の条件は『 6 で割った余りが 1 または 5 』である。(答)

$$(3) \text{【工・地】 } c_n = a_{n+1} - b_n \text{ から } c_n = (n+1)(2n+1)$$

$$c_n > 100(n+1) \Leftrightarrow (2n+1)(n+1) > 100(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > 100$$

$$\therefore n = 50 \quad (\text{答})$$

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地域Ⅳ】

(1) 求める距離 d は $d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$ (答)

(2) 円 C は中心 $A(0, 1)$, 半径1の円である。

(1) の結果より $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ のとき条件を満たす。

$$\therefore 0 < k < \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

(3) 線分 PQ の中点を M とすると, $\triangle APM$ は直角三角形である。

したがって, $\left(\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = 1^2$ から得られる k の値のうち

(2) の条件を満たすものは $k = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ (答)

(4) 直線 l , 直線 AB の x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α , β とすると,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \tan(\alpha - \beta) \right| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + k \cdot \frac{1}{2}} \right| \quad (\because \tan \alpha = k, \tan \beta = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$k = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ であることより $\tan \theta = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ (答)

【医Ⅲ】【工Ⅳ】((1)は工・農学部のみ)

(1) $x^4 - 2xy + y^2 = 0$ より $(y-x)^2 = x^2 - x^4$

$(y-x)^2 \geq 0$ より $x^2 - x^4 \geq 0$ となり $-1 \leq x \leq 1$ (答)

また, このとき $y-x = \pm x\sqrt{1-x^2}$ となり, $y = x \pm x\sqrt{1-x^2}$ (答)

(2) $x=1$ のとき $y=1$ より, x 座標が最大となる点は $(1, 1)$ (答)

$f(x) = x + x\sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x - x\sqrt{1-x^2}$ とおく。

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^2(3-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}-1+2x^2)} \quad (\text{ただし, } x \neq 0 \text{ のとき})$$

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$...	1
$f'(x)$	/	-	0	+	0	-	/
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

また, $x \geq 0$ のとき, $0 \leq g(x) \leq f(x)$

$x < 0$ のとき, $0 > g(x) \geq f(x)$

であることも考慮に入れて,

y 座標が最大となる点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ (答)

(3) $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ より,

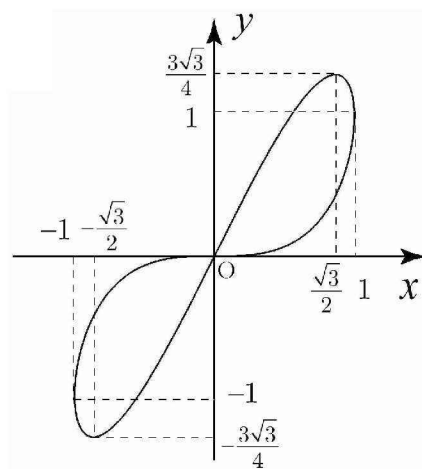
曲線 C は原点对称である。

したがって C で囲まれた図形の面積は

$$2 \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx = 2 \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 2 \left[\frac{-2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$



【工Ⅲ】【医Ⅳ】（工・農学部は(1)(3)のみ）

$$(1) f'(x) = \frac{1 - \beta \log x}{x^{\beta+1}}$$

x	0	...	$e^{\frac{1}{\beta}}$...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{\beta e}$	↘

よって 極大値： $\frac{1}{\beta e}$ $\left(x = e^{\frac{1}{\beta}}\right)$, 極小値：なし (答)

(2) $t = \beta \log x$ とおくと

$$f(x) = \frac{t}{\beta e^t} \quad \text{であり, } x \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow \infty$$

$$\text{したがって } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\beta e^t}$$

$$\text{ここで } t > 0 \text{ のとき } \frac{t^2}{2} < e^t \text{ より, } 0 < \frac{t}{\beta e^t} < \frac{2}{\beta t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\beta t} = 0 \text{ より, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\beta e^t} = 0 \quad \text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad (\text{答})$$

$$(3) I(a) = \int_1^a \left(\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \right)' \log x dx = \left[\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} \log x \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{1-\beta} x^{-\beta} dx$$

$$= \frac{(1-\beta) \log a - 1 + a^{\beta-1}}{(1-\beta)^2 a^{\beta-1}} \quad (\text{答})$$

$$(4) I(a) = \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{\log a}{a^{\beta-1}} - \frac{1}{(1-\beta)^2} \left(\frac{1}{a^{\beta-1}} - 1 \right)$$

ここで, $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a^{\beta-1}}$ について, $a = b^{\frac{\beta}{\beta-1}}$ とおくと, $a \rightarrow \infty$ のとき $b \rightarrow \infty$ より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a^{\beta-1}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\beta-1} \cdot \frac{\log b}{b^\beta} = 0 \quad (\because (2))$$

$$\text{また, } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{\beta-1}} = 0 \quad (\because \beta > 1) \text{ なので} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \frac{1}{(1-\beta)^2} \quad (\text{答})$$