【医Ⅰ】【工Ⅰ】【地Ⅲ】

(1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1)$ (答)

(2) $b_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$ より

$$a_n-b_n=\frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1)-\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore a_n-b_n=-n(2n+1)$$ (答)

(3)【医】 $c_n=a_{n+1}-b_n$ から $c_n=(n+1)(2n+1)$

また，$c_n=3n(n+1)-(n-1)(n+1)$ と変形でき，$n(n+1)$ が $2!$ の倍数であることから，c_n が 6 で割り切れるのは $(n-1)(n+1)$ が 6 の倍数となるとき。

$n-1$ と $n+1$ は偶奇が一致することより，n は奇数となることが必要であり，

このとき，いずれか一方が 3 の倍数になればよい。

すなわち，$n-1$，$n+1$ のいずれかが 6 の倍数であればよい。

したがって，条件を満たす n は整数 k を用いて

$n-1=6k$ または $n+1=6k$ と表されるときである。

よって求める n の条件は『6で割った余りが1または5』である。(答)

(3) 【工・地】$c_n=a_{n+1}-b_n$ から $c_n=(n+1)(2n+1)$

$c_n>100(n+1)\Leftrightarrow(2n+1)(n+1)>100(n+1)$

$\Leftrightarrow 2n+1>100$

$\therefore n=50$ (答)

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地域Ⅳ】

(1) 求める距離dは　$d=\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$　(答)

(2) 円Cは中心$\mathrm{A}(0,\ 1)$，半径1の円である。

(1) の結果より$\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}<1$のとき条件を満たす。

$\therefore 0<k<\dfrac{4}{3}$　(答)

(3) 線分PQの中点をMとすると，△APMは直角三角形である。

したがって，$\left(\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{PQ}}{2}\right)^2=1^2$から得られる$k$の値のうち

(2)の条件を満たすものは　$k=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$　(答)

(4) 直線l，直線ABのx軸の正の向きとのなす角をそれぞれα，βとすると，

$$\tan\theta=\left|\tan(\alpha-\beta)\right|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{k-\frac{1}{2}}{1+k\cdot\frac{1}{2}}\right|\quad \left(\because \tan\alpha=k,\ \ \tan\beta=\frac{1}{2}\right)$$

$k=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$であることより　$\tan\theta=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$　(答)

【工Ⅲ】【医Ⅳ】（工・農学部は(1)(3)のみ）

(1) $f'(x)=\dfrac{1-\beta\log x}{x^{\beta+1}}$

x	0	・・・	$e^{\frac{1}{\beta}}$	・・・
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{\beta e}$	↘

よって　極大値：$\dfrac{1}{\beta e}$　$\left(x=e^{\frac{1}{\beta}}\right)$，極小値：なし　(答)

(2) $t=\beta\log x$とおくと

$f(x)=\dfrac{t}{\beta e^t}$　であり，$x\to\infty$　のとき　$t\to\infty$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\beta e^t}$

ここで$t>0$のとき$\dfrac{t^2}{2}<e^t$より，$0<\dfrac{t}{\beta e^t}<\dfrac{2}{\beta t}$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\beta t}=0$より，　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\beta e^t}=0$　　　よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$　(答)

(3) $\displaystyle I(a)=\int_1^a\left(\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\log x\right]_1^a-\int_1^a\frac{1}{1-\beta}x^{-\beta}dx$

$\displaystyle=\frac{(1-\beta)\log a-1+a^{\beta-1}}{(1-\beta)^2a^{\beta-1}}$　(答)

(4) $\displaystyle I(a)=\frac{1}{1-\beta}\bullet\frac{\log a}{a^{\beta-1}}-\frac{1}{(1-\beta)^2}\left(\frac{1}{a^{\beta-1}}-1\right)$

ここで，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log a}{a^{\beta-1}}$について，$a=b^{\frac{\beta}{\beta-1}}$とおくと，$a\to\infty$のとき$b\to\infty$より

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log a}{a^{\beta-1}}=\lim_{b\to\infty}\frac{\beta}{\beta-1}\bullet\frac{\log b}{b^\beta}=0$　($\because$(2))

また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a^{\beta-1}}=0$　($\because\beta>1$)　なので　　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)=\frac{1}{(1-\beta)^2}$　(答)

【医Ⅲ】【工Ⅳ】((1)は工・農学部のみ)

(1) $x^4-2xy+y^2=0$ より $(y-x)^2=x^2-x^4$

$(y-x)^2 \geqq 0$ より $x^2-x^4 \geqq 0$ となり　$-1 \leqq x \leqq 1$　(答)

また，このとき $y-x=\pm x\sqrt{1-x^2}$ となり，$y=x\pm x\sqrt{1-x^2}$　(答)

(2) $x=1$ のとき $y=1$ より，x 座標が最大となる点は $(1,\ 1)$　(答)

$f(x)=x+x\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=x-x\sqrt{1-x^2}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{x^2(3-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-1+2x^2\right)}$$　(ただし，$x\neq 0$ のとき)

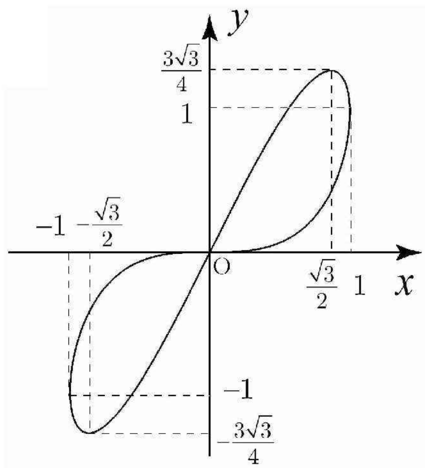
x	-1	・・・	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	・・・	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	・・・	1
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

また，$x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq g(x) \leqq f(x)$

$x<0$ のとき，$0>g(x) \geqq f(x)$

であることも考慮に入れて，

y 座標が最大となる点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$　(答)



(3) $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ より，

曲線 C は原点対称である。

したがって C で囲まれた図形の面積は

$$2\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\left[\frac{-2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}$$　(答)