

【地域 I】

最大辺の長さは $x+2$ であり、(最大辺の長さ) < (他の 2 辺の長さの和) より

$$x+2 < x+(x+1)$$

$$x > 1$$

また、最大辺の向かいの角を θ とすると、余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x+2)^2}{2x(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{2x(x+1)}$$

鈍角三角形となるのは $\cos\theta < 0$ となるときより $x > 1$ と合わせて

$$1 < x < 3 \quad (\text{答})$$

【地域Ⅱ】

(1) 取り出した玉を一行に並べると考えて、 $\frac{5!6!}{11!} = \frac{1}{462}$

(2) 取り出した玉を一行に並べると考えて、 $\frac{6!5!}{11!} = \frac{1}{462}$

(3) 余事象を考えると、(白, 赤)=(1個, 4個), (0個, 5個)より
求める確率は

$$1 - \frac{{}_6C_1 \times {}_5C_4 + {}_5C_5}{{}_{11}C_5} = \frac{431}{462}$$

【医Ⅰ】【工Ⅰ】【地Ⅲ】

$$(1) a_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1) \quad (\text{答})$$

$$(2) b_n = \sum_{k=1}^n (2k)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \text{ より}$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{3}(2n-1)n(2n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore a_n - b_n = -n(2n+1) \quad (\text{答})$$

$$(3) \text{【医】 } c_n = a_{n+1} - b_n \text{ から } c_n = (n+1)(2n+1)$$

また、 $c_n = 3n(n+1) - (n-1)(n+1)$ と変形でき、 $n(n+1)$ が $2!$ の倍数であることから、 c_n が 6 で割り切れるのは $(n-1)(n+1)$ が 6 の倍数となるとき。

$n-1$ と $n+1$ は偶奇が一致することより、 n は奇数となることが必要であり、このとき、いずれか一方が 3 の倍数になればよい。

すなわち、 $n-1$ 、 $n+1$ のいずれかが 6 の倍数であればよい。

したがって、条件を満たす n は整数 k を用いて

$$n-1=6k \text{ または } n+1=6k \text{ と表されるときである。}$$

よって求める n の条件は『 6 で割った余りが 1 または 5 』である。(答)

$$(3) \text{【工・地】 } c_n = a_{n+1} - b_n \text{ から } c_n = (n+1)(2n+1)$$

$$c_n > 100(n+1) \Leftrightarrow (2n+1)(n+1) > 100(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n+1 > 100$$

$$\therefore n = 50 \quad (\text{答})$$

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地域Ⅳ】

(1) 求める距離 d は $d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$ (答)

(2) 円 C は中心 $A(0, 1)$, 半径1の円である。

(1) の結果より $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ のとき条件を満たす。

$$\therefore 0 < k < \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

(3) 線分 PQ の中点を M とすると, $\triangle APM$ は直角三角形である。

したがって, $\left(\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = 1^2$ から得られる k の値のうち

(2) の条件を満たすものは $k = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ (答)

(4) 直線 l , 直線 AB の x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α , β とすると,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \tan(\alpha - \beta) \right| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + k \cdot \frac{1}{2}} \right| \quad (\because \tan \alpha = k, \tan \beta = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$k = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$ であることより $\tan \theta = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ (答)