【医Ⅰ】【工Ⅰ】【地Ⅳ】

(1)　$C_n : y = \dfrac{1}{a_n}x^2$

$y' = \dfrac{2x}{a_n}$ より点 P_n における接線の傾きは 2 より直線 l_n の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

$$l_n : y - a_n = -\frac{1}{2}(x - a_n) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

l_n と C_n の交点の x 座標は

$$\frac{1}{a_n}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n \quad \Leftrightarrow \quad (2x + 3a_n)(x - a_n) = 0 \qquad \therefore x = a_n,\ -\frac{3}{2}a_n$$

よって $a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}a_n$ より　　$a_n = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　(答)

(2)　$A_n = \left| \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n \right) - \frac{1}{a_n}x^2 \right\} dx \right|$

$$= \left| -\frac{1}{a_n} \int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} (x - a_n)\left(x + \frac{3}{2}a_n\right) dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{6a_n} \left\{ a_n - \left(-\frac{3}{2}a_n \right) \right\}^3 \right| = \frac{125}{48}{a_n}^2$$

$$\therefore A_n = \frac{125}{48}\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{125}{48}\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1} = \frac{25}{12}\left\{ \left(\frac{9}{4}\right)^n - 1 \right\} \quad \text{(答)}$$

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地Ⅲ】

(1)　$k(x^2+y^2-4)+x-y+1=0$ より k に関する恒等式とみなして

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$
これを解いて，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$

したがって，求める定点 A，B の座標は $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}\right)$（複号同順）(答)

(2)　円 C の方程式は

$\left(x+\dfrac{1}{2k}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2k}\right)^2=4-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2k^2}$　より，中心 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{1}{2k},\ \dfrac{1}{2k}\right)$

$\mathrm{DE}^2=\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2+\left(5-\dfrac{1}{2k}\right)^2$

$\quad=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-4\right)^2+18$

$k>0$ より $\dfrac{1}{k}>0$ なので，$\dfrac{1}{k}=4$ すなわち $k=\dfrac{1}{4}$ のとき最小となる。

よって　$k=\dfrac{1}{4}$，$r=2\sqrt{2}$　(答)

(3)【医】のみ　$k=\dfrac{1}{4}$ より，円 $C:(x+2)^2+(y-2)^2=8$

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ とおくと

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2=8 \\ x=\dfrac{a+1}{2},\ y=\dfrac{b+5}{2} \end{cases}$$

より，点 P の軌跡は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=2$

この円の中心 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ から直線 $x-y+1=0$ までの距離 $d=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ であり，

$\mathrm{AB}=\sqrt{14}$ であるので，

△ABP の面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\dfrac{5}{2}\sqrt{7}$　(答)

【医Ⅲ】【工Ⅲ】

(1)　(左辺) $\geqq 0$ より　(右辺) $\geqq 0$ なので，$-(x-1)(2x-1) \geqq 0$

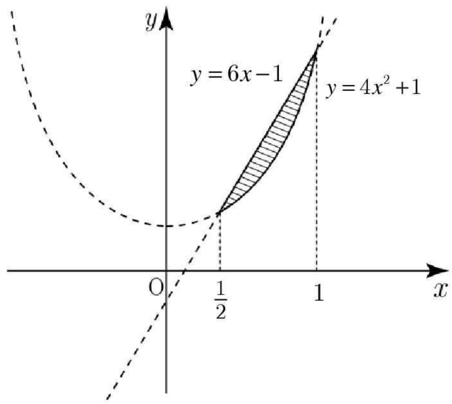
すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

逆にこのとき，題意の式を満たす実数 y が存在するので　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$　(答)

(2)　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において，$y-3x-2x^2 = \pm(x-1)(2x-1)$

すなわち　　$y = 4x^2+1$　または　$y = 6x-1$

したがって　　$S = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \{(6x-1)-(4x^2+1)\}dx = \frac{1}{12}$　(答)



【医Ⅳ】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\left\{\left(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}+\left(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}\right\}$ (答)

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\left\{\left(|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}+\left(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に直交する。（証終）

(3) (2)より点Rは点Aから辺BCに下ろした垂線の足である。(ただし，$\mathrm{A}=\mathrm{H}$ であるときは点Rは定義されないが，他と同様に点Rは点Aから辺BCに下ろした垂線の足として解釈した)

△ABCの面積を S とすると，

$S=\dfrac{1}{2}ab\sqrt{1-x^2}$ であり，$\mathrm{BC}^2=a^2+b^2-2abx$ であるので

$|\overline{\mathrm{AR}}|^2=\left(\dfrac{2S}{\mathrm{BC}}\right)^2=\dfrac{a^2b^2(1-x^2)}{a^2+b^2-2abx}$ (答)

(4) $f(x)=\dfrac{a^2b^2(1-x^2)}{a^2+b^2-2abx}$ とおくとき，$-1<x<1$ であり

$f'(x)=\dfrac{a^2b^2(ax-b)(bx-a)}{(a^2+b^2-2abx)^2}$

（ⅰ）$a<b$ のとき

$x=\dfrac{a}{b}$ で最大となり，$|\overline{\mathrm{AR}}|^2=f\left(\dfrac{a}{b}\right)=a^2$

また，このとき△ABCは $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 (答)

（ⅱ）$a>b$ のとき

$x=\dfrac{b}{a}$ で最大となり，$|\overline{\mathrm{AR}}|^2=f\left(\dfrac{b}{a}\right)=b^2$

また，このとき△ABCは $\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 (答)