【医Ⅰ】【工Ⅰ】【地Ⅳ】

(1) $C_n : y = \dfrac{1}{a_n}x^2$

$y' = \dfrac{2x}{a_n}$ より点 P_n における接線の傾きは2より直線 l_n の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

$$l_n : y - a_n = -\frac{1}{2}\left(x - a_n\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n$$

l_n と C_n の交点の x 座標は

$$\frac{1}{a_n}x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n \quad \Leftrightarrow \quad \left(2x + 3a_n\right)\left(x - a_n\right) = 0 \qquad \therefore x = a_n,\ -\frac{3}{2}a_n$$

よって $a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}a_n$ より　　$a_n = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$　(答)

(2) $A_n = \left|\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n} \left\{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}a_n\right) - \frac{1}{a_n}x^2\right\}dx\right|$

$$= \left|-\frac{1}{a_n}\int_{-\frac{3}{2}a_n}^{a_n}\left(x - a_n\right)\left(x + \frac{3}{2}a_n\right)dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6a_n}\left\{a_n - \left(-\frac{3}{2}a_n\right)\right\}^3\right| = \frac{125}{48}{a_n}^2$$

$$\therefore A_n = \frac{125}{48}\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{125}{48}\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1} = \frac{25}{12}\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^n - 1\right\}$$ (答)

【医Ⅱ】【工Ⅱ】【地Ⅲ】

(1)　$k\left(x^2+y^2-4\right)+x-y+1=0$ より k に関する恒等式とみなして

$$\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \qquad \text{これを解いて，}\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$$

したがって，求める定点 A，B の座標は $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}\right)$（複号同順）（答）

(2)　円 C の方程式は

$\left(x+\dfrac{1}{2k}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2k}\right)^2=4-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{2k^2}$　より，中心 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{1}{2k},\ \dfrac{1}{2k}\right)$

$$\mathrm{DE}^2=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2+\left(5-\frac{1}{2k}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-4\right)^2+18$$

$k>0$ より $\dfrac{1}{k}>0$ なので，$\dfrac{1}{k}=4$ すなわち $k=\dfrac{1}{4}$ のとき最小となる。

よって　$k=\dfrac{1}{4}$，$r=2\sqrt{2}$　(答)

(3)【医】のみ　$k=\dfrac{1}{4}$ より，円 $C:(x+2)^2+(y-2)^2=8$

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ とおくと

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2=8 \\ x=\dfrac{a+1}{2},\ y=\dfrac{b+5}{2} \end{cases}$$

より，点 P の軌跡は $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=2$

この円の中心 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ から直線 $x-y+1=0$ までの距離 $d=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ であり，

$\mathrm{AB}=\sqrt{14}$ であるので，

△ABP の面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\dfrac{5}{2}\sqrt{7}$　(答)

【医Ⅲ】【工Ⅲ】

(1)　(左辺) $\geqq 0$ より　(右辺) $\geqq 0$ なので，$-(x-1)(2x-1) \geqq 0$

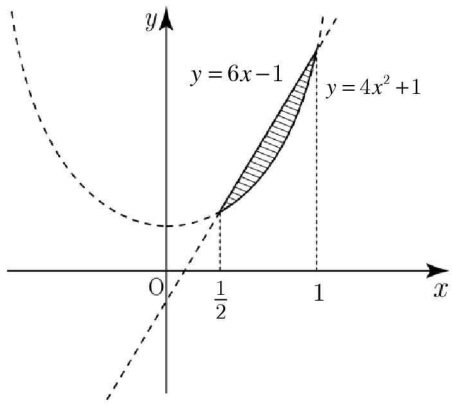
すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$

逆にこのとき，題意の式を満たす実数 y が存在するので　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$　(答)

(2)　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において，$y-3x-2x^2 = \pm(x-1)(2x-1)$

すなわち　$y=4x^2+1$　または　$y=6x-1$

したがって　$S=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{(6x-1)-(4x^2+1)\}dx=\frac{1}{12}$　(答)



【工Ⅳ】

(1) $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

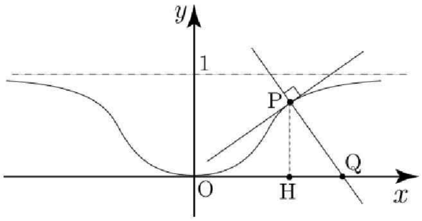
したがって $f(x)$ は　区間 $x \geqq 0$ で増加し，区間 $x \leqq 0$ で減少する。(答)

(2) 点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ における法線の方程式は

$$y-\frac{t^2}{1+t^2}=-\frac{(1+t^2)^2}{2t}(x-t)$$

より点 Q の x 座標は $x=t+\dfrac{2t^3}{(1+t^2)^3}$

$$\therefore S(t)=\frac{t^5}{(1+t^2)^4}\quad \text{(答)}$$



(3) $t>0$ のとき $S'(t)=\dfrac{-t^4(3t^2-5)}{(1+t^2)^5}$ より

t	0		$\frac{\sqrt{15}}{3}$	
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	最大	↘

$t=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ のとき最大値：$\dfrac{75\sqrt{15}}{4096}$　(答)